

第一次习题课

离散数学

习题课内容

- 作业讲解
- Lab讲解
- 答疑

命题的定义

命题是一个能表达判断并具有**确定真值**的**陈述句**。

未回答

问题 3

0 / 10 分

“这句话是错的。”不是命题。

正确答案

☐ True

☐ False

悖论不是命题。

命题形式化

未回答

问题 1

0 / 10 分

若 P 表示“我可以做对这道题目”， Q 表示“你可以做对这道题目”，那么“我或你都可以做对这道题目”可以表示为 $P \vee Q$ 。

☐ True

正确答案

☐ False

“或” 不一定使用析取

未回答

问题 3

0 / 10 分

若 P 表示 Tom 是一个男生， Q 表示 Tom 是一个女生，那么 Tom 是一个男生或者 Tom 是一个女生表示为 () 。

正确答案

☐ $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

☐ $(\neg P) \vee (\neg Q)$

☐ $P \vee Q$

☐ 这些选项都不对

Tom不可能既是男生又是女生

独立完备集

独立完备集 $\{\neg, \vee\}$ 或 $\{\neg, \wedge\}$

未回答 问题 7 0 / 10 分

以下哪些联结词集合不是独立完备集?

☐ $\{\downarrow\}$

☐ $\{\neg, \wedge, \vee\}$

☐ $\{\neg, \leftrightarrow\}$

☐ $\{\neg, \rightarrow\}$

或非

正确答案

正确答案

不独立

不完备

$$P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$$

$$P \downarrow P = \neg(P \vee P) = \neg P$$

$$(P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q) = \neg(P \downarrow Q) = P \vee Q$$

$$\neg P \rightarrow Q = \neg(\neg P) \vee Q = P \vee Q$$

等值定理

未回答

问题 9

0 / 10 分

$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 和以下哪些式子等值?

正确答案

☐ $P \rightarrow (\neg R \rightarrow \neg Q)$

☐ $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$

正确答案

☐ $(P \wedge Q) \rightarrow R$

正确答案

☐ $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$

简化为合取或者析取式

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = P \rightarrow (\neg Q \vee R) = \neg P \vee \neg Q \vee R$$

$$P \rightarrow (\neg R \rightarrow \neg Q) = P \rightarrow (R \vee \neg Q) = \neg P \vee (R \vee \neg Q) = \neg P \vee \neg Q \vee R$$

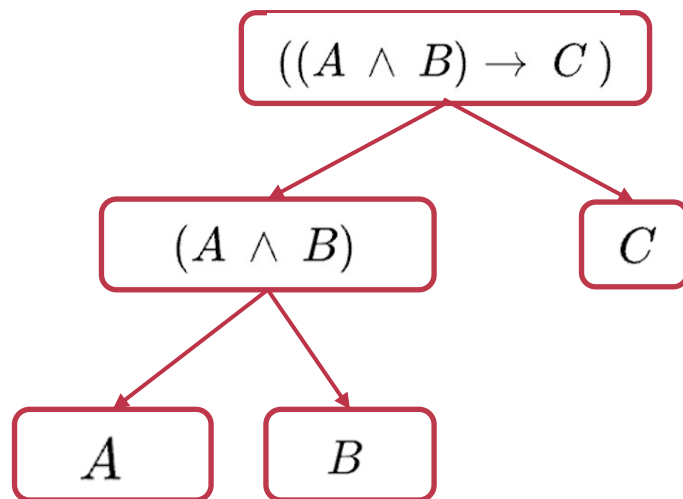
$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R = (\neg P \vee Q) \rightarrow R = \neg(\neg P \vee Q) \vee R = (P \wedge \neg Q) \vee R$$

$$(P \wedge Q) \rightarrow R = \neg(P \wedge Q) \vee R = \neg P \vee \neg Q \vee R$$

$$Q \rightarrow (P \rightarrow R) = Q \rightarrow (\neg P \vee R) = \neg Q \vee \neg P \vee R = \neg P \vee \neg Q \vee R$$

合式公式的判断

在判断合式公式时，若输入表达式 $P = ((A \wedge B) \rightarrow C)$ ，那么会生成几个叶子结点



范式

未回答

问题 5

0 / 20 分

命题公式 $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$ 的主析取范式中含极小项的个数为 ()

☐ 3

☐ 8

☐ 0

☐ 5

正确答案

使用真值表判断

范式

P	Q	R	$\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

极小项的个数等于真值表中T行的数量

Switch Variable

问题 1

10 分

$(A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A4) \vee (B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge B4)$ 使用switch variable转化成CNF后会包含几个子句?

☐ 4

☐ 2

☐ 8

☐ 16

The translation is
equi-satisfiable.

$$(A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A4) \vee (B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge B4)$$

↓

$$(Z \rightarrow (A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A4)) \wedge (\neg Z \rightarrow (B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge B4))$$

The translation
is not equivalent.

↓

$$(Z \rightarrow (A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A4)) \wedge (\neg Z \rightarrow (B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge B4))$$
$$= (\neg Z \vee (A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A4)) \wedge (Z \vee (B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge B4))$$
$$= (\neg Z \vee A1) \wedge (\neg Z \vee A2) \wedge (\neg Z \vee A3) \wedge (\neg Z \vee A4)$$
$$\wedge (Z \vee B1) \wedge (Z \vee B2) \wedge (Z \vee B3) \wedge (Z \vee B4)$$

Switch Variable

问题 9

10 分

使用 switch variable 把一个公式化成 CNF 时，转换得到的公式与原本的公式必定等值。

☐ True

☐ False

可满足性等价，但不等值

问题 2

10 分

$\emptyset \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (Decide)$

$1^d \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$

现在反复使用UnitPropagate Rule, 最多可以推出多少个原子命题的真值?

☐ 1

☐ 3

☐ 2

☐ 0

$\emptyset \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (Decide)$

$1^d \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$

$1^{d3} \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (Decide)$

最多只能推出3是T

$\emptyset \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (Decide)$

$1^d \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$

请用 DPLL 继续求解上面的式子，如果再次需要用到 decide rule，请先猜测 2 的真值是 T。那么中间需要用到 () 次 backtrack rule。

☐ 2

☐ 1

☐ 0

☐ 3

$\emptyset \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (Decide)$

$1^d \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$

$1^d 3 \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (Decide)$

$1^d 3 2^d \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$

$1^d 3 2^d \bar{4} \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (BackTrack)$

$1^d 3 2 \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$

$1^d 3 2 \bar{4} \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (BackTrack)$

$\bar{1} \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$

$\bar{1} 3 \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$

$\bar{1} 3 4 \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4 \Rightarrow (UnitPropagate)$

$\bar{1} 3 4 2 \parallel 1 \vee 3, \bar{2} \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 2 \vee \bar{4}, \bar{1} \vee 3, \bar{2} \vee \bar{3} \vee 4, 1 \vee 4, \bar{1} \vee 2 \vee 4$

Lab1 问题

- 河中有 n 个石头，Tom 和 Jerry 想要踩着石头过河，这些石头有**两种状态**，要么浮在水面上，要么沉在水底。河边有 m 个开关，控制石头的沉浮。**每个开关控制 1 或 2 个石头，每块石头被 1 或 2 个开关控制**。每次打开或关闭一个开关，这个开关控制的石头都会改变状态，从水下浮到水上或者从水上沉到水下。
- 一开始所有开关都是关闭的，石头有的在水上有的在水下。请利用 MiniSat 来判断如何控制这些开关使得**所有石头同时浮在水上**。

MiniSat

- solver
- variables
- clause(CNF)
- solve
- modelValue

```
int main()
{
    // Create a solver
    Solver solver;

    // Create variables
    auto A = solver.newVar();
    auto B = solver.newVar();
    auto C = solver.newVar();

    // Add the clauses
    // (~A v ~B v C)
    solver.addClause(~mkLit(A), ~mkLit(B), mkLit(C));
    // (~A v ~B v ~C)
    solver.addClause(~mkLit(A), ~mkLit(B), ~mkLit(C));
    // (A v ~B v C)
    solver.addClause(mkLit(A), ~mkLit(B), mkLit(C));

    // Solve the problem
    auto sat = solver.solve();

    // Check solution and retrieve model if found
    if (sat)
    {
        std::clog << "SAT\n"
        << "Model found:\n";
        std::clog << "A := " << (solver.modelValue(A) == l_True) << '\n';
        std::clog << "B := " << (solver.modelValue(B) == l_True) << '\n';
        std::clog << "C := " << (solver.modelValue(C) == l_True) << '\n';
        return 0;
    }
    else
    {
        std::clog << "UNSAT\n";
        return 1;
    }
}
```

Lab1

- **重点**

- 每个开关控制 1 或 2 个石头
- 每块石头被 1 或 2 个开关控制

- **思路**

- 开关 i 的状态命题变项 A_i 表示
- 石头 i 的状态用命题公式 P_i 表示, P_i 可以用 A_i 表示
- 最后需要解决的是 $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$ 的可满足性问题

Lab1

- 如何用开关的状态 A_i 表示石头的状态 P_i
 - 石头初始状态
 - 石头被几个开关控制
- 简化情况：1个开关控制1个石头，1个石头被1个开关控制
 - 若石头初始在水面上， $P_i = \neg A_i$
 - 若石头初始在水面下， $P_i = A_i$
- 题目中每个石头被1或2个开关控制

Q & A